

exercice

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^{1-x}$.

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Q1a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} de la fonction f .

Q1b) Déterminer la fonction dérivée f' .

Q1c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .

Q1d) Représenter la courbe \mathcal{C} .

2) Pour tout entier naturel n , on note I_n l'intégrale définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

2a) Calculer I_0 .

2b) En dérivant la fonction $x^{n+1} e^{1-x}$, montrer la relation

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2c) En déduire I_1 et I_2 .

2d) Donner une interprétation graphique de I_2 . La représenter sur le graphique de

Q3a) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$\forall x \in [0; 1] \quad x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n.$$

Q3b) En déduire un encadrement de I_n .

Q3c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.